

注意事项:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 150 分,考试时间 120 分钟.答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡的相应位置上.
2. 回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其它答案标号.写在本试卷上无效.
3. 回答第 II 卷时,将答案写在答题卡上,写在本试卷上无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | \lg x \leq 0\}$, 集合 $B = \{x | (x-2)(2x+1) \leq 0\}$, 则 $A \cap B =$
A. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 1\}$ B. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 2\}$ C. $\{x | -\frac{1}{2} \leq x \leq 0\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 1\}$
2. 复数 $z = i(1-i)$ (i 为虚数单位) 的共轭复数 $\bar{z} =$
A. $1+i$ B. $1-i$ C. $-1+i$ D. $-1-i$
3. 某口罩厂的三个车间在一个小时内共生产 3600 个口罩,在出厂前要检查这批口罩的质量,决定采用分层抽样的方法进行抽取,若从一、二、三车间抽取的口罩数分别为 a, b, c 且 a, b, c 构成等差数列,则第二车间生产的口罩数为
A. 800 B. 1000 C. 1200 D. 1500
4. 永定土楼,位于中国东南沿海的福建省龙岩市,是世界上独一无二的神奇的山区民居建筑,是中国古建筑的一朵奇葩. 2008 年 7 月,成功列入世界遗产名录. 它历史悠久、风格独特,规模宏大、结构精巧. 土楼具体有圆形,方形,五角形,八角形,日字形,回字形,吊脚楼等类型. 现有某大学建筑系学生要重点对这七种主要类型的土楼依次进行调查研究. 要求调查顺序中,圆形要排在第一个或最后一个,方形、五角形相邻. 则共有()种不同的排法.
A. 480 B. 240
C. 384 D. 1440



5. “ $\log_3 a < \log_3 b$ ”是“ $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ ”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_3 + 2a_8 = 4$, 则 $2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot \dots \cdot 2^{a_9} =$

- A. 32 B. 256 C. 512 D. 1024

7. $(x+2)(1-2x)^5$ 的展开式中含 x^2 的项的系数是

- A. 70 B. 80 C. -50 D. -70

8. 若实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x - 3y$ 的最大值是

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

9. 下列函数中,既是奇函数,又在 $(0,1)$ 上单调递减的是

- A. $f(x) = \ln(e^x + e^{-x}) - \ln(e^x - e^{-x})$ B. $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$
C. $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$ D. $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

10. 过正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 顶点 A 作平面 α , 使 $\alpha \parallel$ 平面 A_1B_1CD , A_1D_1 和 D_1C_1 的中点分别为 E 和 F , 则直线 EF 与平面 α 所成角的正弦值为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

11. 已知 A, B 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的右顶点和上顶点, P 为椭圆 C 上一点, 若 $\triangle PAB$ 的面积是 $\sqrt{2}-1$, 则 P 点的个数为

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

12. 球面上两点之间的最短连线的长度,就是经过这两个点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度(大圆就是经过球心的平面截球面所得的圆),我们把这个弧长叫做两点的球面距离. 已知正 $\triangle ABC$ 的顶点都在半径为 2 的球面上,球心到 $\triangle ABC$ 所在平面距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, 则 A, B 两点间的球面距离为

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

二、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.把答案填写在答题纸相应位置上.

13. 已知点 $A(-1,1)$ 、 $B(1,2)$ 、 $C(-2,-1)$ 、 $D(3,4)$, 则向量 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CD}$ 的夹角余弦值为_____.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = 1$, 前 n 项和为 S_n , 且满足 $2a_{n+1} + S_n = 2 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n =$ _____.

15. 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_1 的直线与双曲线 C 的两条渐近线分别交于 P, Q 两点(P 在第二象限, Q 在第一象限), $\overrightarrow{F_1P} = 2\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{F_1Q} \cdot \overrightarrow{F_2Q} = 0$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

16. 关于函数 $f(x) = 2\sin x + \sin 2x$ 有如下四个命题:

- ① $f(x)$ 的最小正周期为 2π ;
- ② $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内有 3 个极值点;
- ③ $f(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 内有 3 个零点;
- ④ $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称.

其中所有真命题的序号为_____.

三、解答题:共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(一) 必考题:共 60 分.

17. (本小题满分 12 分)

据调查,目前对于已经近视的小学生,有两种配戴眼镜的选择,一种是佩戴传统的框架眼镜;另一种是佩戴角膜塑形镜,这种眼镜是晚上睡觉时佩戴的一种特殊的隐形眼镜(因其在一定程度上可以减缓近视的发展速度,越来越多的小学生家长选择角膜塑形镜控制孩子的近视发展).A 市从该地区小学生中随机抽取容量为 100 的样本,其中因近视佩戴眼镜的有 24 人(其中佩戴角膜塑形镜的有 8 人,其中 2 名是男生,6 名是女生).

(1) 若从样本中选一位学生,已知这位小学生戴眼镜,那么,他戴的是角膜塑形镜的概率是多大?

(2) 从这 8 名戴角膜塑形镜的学生中,选出 3 个人,求其中男生人数 X 的分布列;

(3) 若将样本的频率当做估计总体的概率,请问,从 A 市的小学生中,随机选出 20 位小学生,求佩戴角膜塑形镜的人数 Y 的期望和方差.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x \cos x - 3\cos^2 x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调递减区间;

(2) 在锐角 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $f(C) = 1, c = \sqrt{3}$, D 为 AB 的中点,求 CD 的最大值.

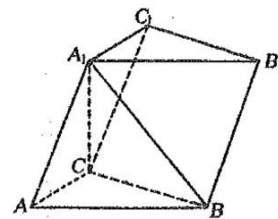
19. (本小题满分 12 分)

如图,三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle A_1AC = 60^\circ$

$AC \perp BC, A_1C \perp AB, AC = 1, AA_1 = 2$

(1) 求证: $A_1C \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若直线 BA_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$, 求二面角 A_1-BB_1-C 的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知 $f(x) = a^x - x \ln a (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1), g(x) = x^2$

(1) 当 $0 < a < 1$ 时,求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设 $h(x) = f(x) + g(x)$, 存在 $x_1, x_2 \in [-1, 1]$, 使 $|h(x_1) - h(x_2)| \geq e - 1$ 成立. 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

过点 $P(0, 2)$ 作直线 l 交抛物线 $G: x^2 = 4y$ 于 A, B 两点, O 为坐标原点, 分别过 A, B 点作抛物线 G 的切线, 设两切线交于 Q 点.

(1) 求证: 点 Q 在一条定直线 m 上;

(2) 设直线 AO, BO 分别交直线 m 于点 C, D .

(I) 求证: $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$;

(II) 设 $\triangle AOD$ 的面积为 S_1 , $\triangle BOC$ 的面积为 S_2 , 记 $P = S_1 + S_2$, 求 P 的最小值.

(二) 选考题:请考生在第 22, 23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分, 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号涂黑. 本题满分 10 分.

22. [选修 4-4:坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases} (\alpha \text{ 为参数})$, 以原点为极点, x 轴非负

半轴为极轴建立极坐标系, 射线: $\theta = \varphi$ 与曲线 C 交于点 T , 将射线 OT 绕极点逆时针方向旋转 90° 交曲线 C 于点 N .

(1) 求曲线 C 的极坐标方程;

(2) 求 $\triangle TON$ 面积的范围.

23. [选修 4-5:不等式选讲]

已知函数 $f(x) = |x - 2| + |x + 1|$.

(1) 解关于 x 的不等式 $f(x) \geq 4 - x$;

(2) $a, b \in \{y | y = f(x)\}$, 试比较 $2(a + b)$ 与 $ab + 4$ 的大小.